

文章编号: 1671-1742(2005)01-0022-05

交替方向隐式时域有限差分算法的应用与发展

付 强, 刘长军

(四川大学电子信息学院, 四川成都 610064)

摘要: 探讨了近年来出现的交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)的应用和发展。该方法采用求解微分方程的交替方向隐式改进了FDTD 算法, 无条件稳定, 时间步长不受 Courant 稳定条件的限制, 从而节约了计算时间。提供了微带线电路、平行波导板等计算实例。同时针对 ADI-FDTD 内存占用量较大, 数值色散增加等存在的不足, 讨论了一些改进方法。

关 键 词: 时域有限差分法; 无条件稳定; 交替方向隐式

中图分类号: TN011

文献标识码: A

1 引言

时域有限差分法(Finite-Difference Time-Domain-FDTD)作为一种简单直观的时域算法, 目前已经在电磁学的各个领域中得到了广泛的应用。然而基于显式差分格式的传统 FDTD 方法的时间步长要受到 CFL 稳定性条件的限制, 当计算区域中存在精细结构时, 其时间步长将很小, 使得传统 FDTD 方法的计算时间明显增加。

近年出现的基于交替方向隐式技术(Alternating Direction Implicit, ADI)的 ADI-FDTD 方法。它能够令 FDTD 方法在很大程度上摆脱关于时间步长的稳定性条件限制, 明显地节省计算时间。采用传统 FDTD 方法的 Yee 氏网格, 将偏微分方程数值解法中适用于解决多维空间问题的交替方向隐式算法巧妙地应用到显式 FDTD 法的差分迭代方程中。这种方法的突出优点是能明显节约计算时间。这里提供了计算实例, 并介绍了 ADI-FDTD 目前的应用, 最后针对 ADI-FDTD 本身存在的几个问题, 如内存使用量、数值色散误差等进行了分析, 提出了改进方法。

2 ADI-FDTD 的计算公式及迭代过程

ADI-FDTD 方法中的电磁场分量在空间网格的分布方式与传统 FDTD 方法一致。但需将原来一个时间步长的计算分成两次来进行。下面分别以两个步骤中的 E_x, H_y 为例, 给出三维电磁场问题的 ADI-FDTD 具体迭代公式。该计算公式可适用于非均匀有耗媒质, 空间网格非一致的普遍情况^[1]。

<第(n)步到第(n+1/2)步>:

$$E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) = Ca(i+1/2, j, k) \cdot E_x^n(i+1/2, j, k) + Cb(i+1/2, j, k) \cdot [(H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^n(i+1/2, j-1/2, k)) / \Delta_y(j) - (H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)) / \Delta_z(k)] \quad (1)$$

$$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) = H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) + Cq(i+1/2, j, k+1/2) \cdot [(E_z^n(i+1, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)) / \Delta_x(i) - (E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1) - E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k)) / \Delta_z(k)] \quad (2)$$

<第(n+1/2)步到第(n+1)步>:

$$E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) = Ca(i+1/2, j, k) \cdot E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) + Cb(i+1/2, j, k) \cdot [(H_z^{n+1}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1}(i+1/2, j-1/2, k)) / \Delta_y(j) - (H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)) / \Delta_z(k)] \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+1}(i+1/2, j+1/2, k) = & H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) + Cq(i+1/2, j+1/2, k) \cdot \\
 & [(E_x^{n+1}(i+1/2, j+1, k) - E_x^n(i+1/2, j, k)) / \Delta y(j) - \\
 & (E_y^{n+1/2}(i+1, j+1/2, k) - E_y^{n+1/2}(i, j+1/2, k)) / \Delta x(i)]
 \end{aligned} \quad (4)$$

公式中系数分别如下:

$$\begin{aligned}
 Ca(i, j, k) = & \frac{2\epsilon(i, j, k) - \sigma(i, j, k)\Delta t}{2\epsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)\Delta t} \\
 Cb(i, j, k) = & \frac{2\Delta t}{2\epsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)\Delta t} \\
 Cq(i, j, k) = & \frac{\Delta t}{\mu(i, j, k)}
 \end{aligned}$$

(1)~(4)式均为隐式,在方程的左右两边含有定义为相同时刻的场分量,不能直接用来进行编程计算,需对其中某些方程式进行联立消元,进一步推导其迭代公式。将(2)代入(1),消去 $H_y^{n+1/2}$ 分量,可得如下差分方程:

$$\begin{aligned}
 -\alpha E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1) + \beta E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) - \gamma E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1) = & \\
 p \cdot E_x^n(i+1/2, j, k) + [H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^n(i+1/2, j-1/2, k)] / \Delta y(j) - & \\
 [H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^n(i+1/2, j, k-1/2)] / \Delta z(k) + & \\
 q \cdot [E_z^n(i+1, j, k-1/2) - E_z^n(i, j, k-1/2)] / [\Delta x(i) \Delta z(k)] - & \\
 r \cdot [E_z^n(i+1, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)] / [\Delta x(i) \Delta z(k)] & \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \alpha &= Cq(i+1/2, j, k-1/2) / \Delta z(k)^2 \\
 \beta &= 1 / Cb(i+1/2, j, k) + \alpha + \gamma \\
 \gamma &= Cq(i+1/2, j, k+1/2) / \Delta z(k)^2 \\
 p &= Ca(i+1/2, j, k) / Cb(i+1/2, j, k) \\
 q &= Cq(i+1/2, j, k-1/2) \\
 r &= Cq(i+1/2, j, k+1/2)
 \end{aligned}$$

其余电场分量可用同样的方法得到,且均满足形式如式(5)的方程。在整个网格空间求解方程组,即可得到各电场分量的值,再由(2)可以求出 $H_y^{n+1/2}$ 的值。类似地,可以完成 $n+1/2$ 时刻全部场量的计算。采用同样的方法,可以计算后半个时间步长的全部电磁场分量。文献[2]中已从理论上证明该算法是无条件稳定的,即时间步长不受空间步长大小的限制。

3 计算应用实例

目前,ADI-FDTD 方法已经在许多具体结构的电磁仿真中应用,如:T 形槽线结构在时域结合近远场变换求解天线方向图,介质壁附近的单极子天线,谐振腔,光电子带隙结构,开缝平行板波导,圆柱微带线,微带振荡电路和滤波器,人体头部 SAR(Specific Absorption Rate) 分布等。

3.1 二维平行板波导模型

计算一个包含损耗介质薄片的平行板波导模型的信号传输情况,波导结构如图 1 所示。波导边界为理想电导体(PEC),内部有两个带有 0.3mm 间隙的介质薄片。该介质薄片厚度为 0.5mm,介电特征参数为 $\epsilon_r=2.0$, $\mu_r=2.0$, $\sigma=15.0 \text{ S/m}$ 。在介质薄片间隙附近设置空间网格尺寸为 $0.1 \text{ mm} \times 0.1 \text{ mm}$,其余计算空间网格尺寸为 $1.0 \text{ mm} \times 1.0 \text{ mm}$ 。ADI-FDTD 方法取 $\Delta t=3.33 \text{ ps}$;使用传统 FDTD 方法时,时间步长受 Courant 条件限制, $\Delta t=0.23 \text{ ps}$ 。激励源 $E_{source} = E_{source} + e^{-(t-t_0)^2/\tau^2}$,其中 $t_0=120 \text{ ps}$, $\tau=33 \text{ ps}$ 。

两种方法计算结果吻合较好。但由于 ADI-FDTD 的时间步长不受 Courant 条件限制,所以本

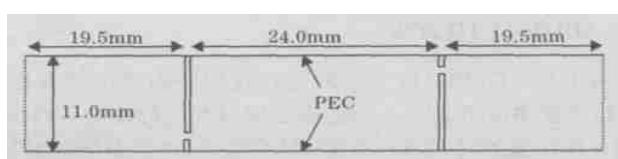


图 1 平行板波导模型

例中 ADI-FDTD 的计算时间仅为传统 FDTD 方法的 25% 左右。表 1 比较了两种方法在该结构中的实际计算时间。

表 1 ADI-FDTD 与传统 FDTD 计算时间比较

	时间步长 Δt	计算步数	CPU 计算时间
传统 FDTD 方法	0.23 ps	11600	63.7 s
ADI-FDTD 方法	3.33 ps	800	15.1 s

3.2 线性微带谐振器

仿真计算如图 2 所示的线性微带谐振器结构。介质层厚度 $810\mu\text{m}$, 相对介电常数 3.25。 $W=1.842\text{mm}$, $L=26.4\text{mm}$, $g=20\mu\text{m}$ 。微带厚度 $18\mu\text{m}$ 。空间网格划分在 x , y 和 z 方向分别为 $153.5\mu\text{m}$, $135\mu\text{m}$ 和 $5\mu\text{m}$ 。由于 CFL 稳定条件的限制, 传统 FDTD 算法要求本模型时间步长 $\Delta t \leq 16.6464\text{fs}$ 。而对于 ADI-FDTD 方法则可将时间步长增大 20 倍。采用 Mur 一阶边界条件。

用 FDTD 和 ADI-FDTD 两种方法计算所得的谐振器插入损耗如图 3 所示, 两者的计算结果十分接近。表 2 比较了两种方法选取的时间步长和计算过程所耗费的时间。由此可以看出, 在保证该种计算精确度的前提下, ADI-FDTD 的 CPU 计算时间仅为传统 FDTD 方法的 26% 左右。

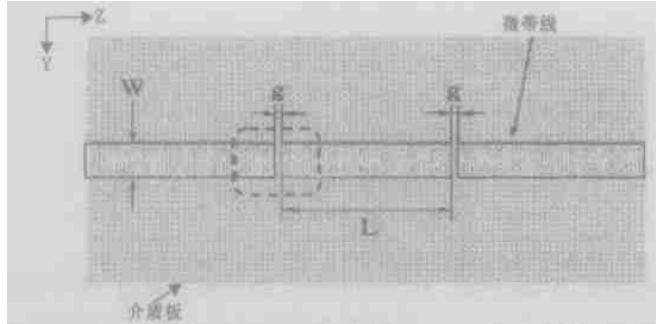


图 2 线性微带谐振器

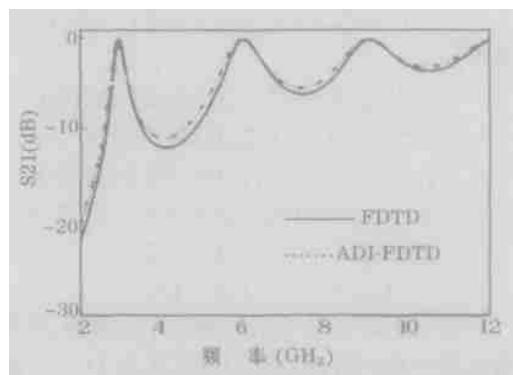


图 3 微带谐振器插入损耗

表 2 ADI-FDTD 与传统 FDTD 计算时间比较

	时间步长 Δt	CPU 计算时间
传统 FDTD 方法	16.64fs	175.2min
ADI-FDTD 方法	332.80fs	46.1min

由以上计算可以看出, 由于时间步长取值成倍增加, 导致了 ADI-FDTD 方法计算的时间步长比传统 FDTD 方法成倍减少, 因而大大节约了总计算时间。

4 ADI-FDTD 方法的改进及发展方向

理论分析和实际应用都已经证明 ADI-FDTD 方法是一种行之有效的代替传统 FDTD 的改进算法, 但仍有不足之处。针对内存使用量较大, 数值色散增加等问题, 提出如下一些改进方案和研究方向。

4.1 ADI/R-FDTD 方法

由于在 ADI-FDTD 方法的迭代过程中需要求解方程组, 所以计算中对内存的需求将会提高, 至少比传统 FDTD 方法多占用 30%。因此有必要对此进行改进。目前一个比较有效的方法是将 ADI-FDTD 方法和能够减少内存使用量的 R-FDTD^[4]方法结合起来, 产生新的 FDTD 迭代算式。为简化说明, 下面以在真空中传播的二维 TE 波为例。除了 Maxwell 方程中的两个旋度方程以外, 还利用了电场的散度方程 $\nabla \cdot (\epsilon E) = 0$ 的时间及空间差分格式

$$(C) 1994-2025 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net \quad (6)$$

利用(6)式和 Maxwell 方程旋度式偏微分方程的 ADI 解,即可得到具有 ADI-FDTD 和 R-FDTD 两种方法优点的 ADI-R-FDTD 方法的计算式。用 ADI/R-FDTD 计算的实际算例数值结果与传统方法结果一致,证明了这是一种可以实际应用的有效方法。

4.2 高阶 FDTD 差分格式

将问题空间离散为网格空间导致数值色散是偏微分方程的多种数值解法(包括 FDTD 方法)所具有的共同缺点。如欲尽量控制这种数值色散,一种简单的方法是增加网格的密度,但增加了所需计算资源;另一种方法是采用高阶差分。第二部分所提供的普遍 ADI-FDTD 方法在空间上取的是二阶近似,为了进一步提高计算精度,可将 Maxwell 方程的空间近似式取四阶有限差分。例如:

$$\begin{aligned}\partial H_z^n(i, j, k) / \partial y = & [-H_z^n(i+1/2, j+3/2, k) + 27H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - \\ & 27H_z^n(i+1/2, j-1/2, k) + H_z^n(i+1/2, j-3/2, k)] + O(\Delta y^2)\end{aligned}$$

文献[6]中已详细论证了采用这种高阶差分迭代式仍然是无条件稳定的,而数值色散比二阶差分算法显著减小。这种方法的缺点是增加了计算的复杂性。

4.3 在 FDTD 算法的运算空间增加各向异性介质控制数值色散

Juntunen[7]等采用在 FDTD 算法的运算空间增加各向异性介质的手段,达到了控制数值色散、减小误差的目的。把这种方法发展应用到 ADI-FDTD 当中,发现其同样能有效地控制数值色散,并且效果要优于在传统 FDTD 方法中的应用,从而一定程度上克服了 ADI-FDTD 数值色散较为明显的缺点。

以二维空间 TE 波为研究对象,在所研究的空间添加一种简单的各向异性媒质,设其对应的介电常数: $\epsilon = \text{diag}(\epsilon_x, \epsilon_y)$, 利用此种情况下对应的传统 FDTD 时间稳定性条件和色散关系,并引入参数 Z 与 R 分别表示不同方向空间步长比,以及真空中波长与空间步长的关系: $Z = \Delta_x / \Delta_y$, $R = \lambda / \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$, 可得超越方程^[6]

$$\left[\frac{\epsilon_x + \epsilon_y Z^2}{\epsilon_x \epsilon_y Z^2} \sin^2 \left(\frac{\pi q Z \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}}{R \sqrt{1+Z^2}} \right) \right]^2 = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \sin \alpha}{AR \sqrt{1+Z^2}} \right)}{\epsilon_x} + \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi Z \cos \alpha}{AR \sqrt{1+Z^2}} \right)}{\epsilon_y Z^2} \quad (7)$$

式中 $A = c' / c_0 = \lambda' / \lambda_0$, 用 λ' , λ_0 , c' , c_0 分别表示网格空间和真空对应的数值波长以及相速。 A 是相速数值解与理想值的比, A 恰好为 1 时, 两者一致, 属理想的无相速误差情况。理论上, 对于确定的频点, 利用(6)式可以求出 $A=1$ 时不同方向介质的介电常数, 即通过在计算空间添加各向异性的媒质, 可以达到修正数值相速, 获得理想相速的目的。

由于 ADI-FDTD 实质上是显式 FDTD 方法的变形, 两种方法遵循相同的色散关系, 因而这种减少数值色散的方法也应该同样适用于 ADI-FDTD 方法。ADI-FDTD 方法包含两个“亚时间步”, 以 E_x 为例, 添加介电常数为 ϵ 的各向异性媒质后, 修改后的迭代公式为:

$$\begin{aligned}E_x^{n+1/2}(i+1/2, j) = & E_x^n(i+1/2, j) + \frac{\Delta y}{2\epsilon \epsilon_x \Delta y} \cdot [H_z^n(i+1/2, j+1/2) - H_z^n(i+1/2, j-1/2)] \\ E_x^{n+1}(i+1/2, j-1) - & \left[\left[\frac{2\sqrt{\epsilon \epsilon_x} \mu \Delta y}{\Delta t} \right]^2 + 2 \right] \cdot E_x^{n+1}(i+1/2, j) + E_x^{n+1}(i+1/2, j+1) = \\ - & \left[\frac{2\sqrt{\epsilon \epsilon_x} \mu \Delta y}{\Delta t} \right]^2 \cdot E_x^{n+1/2}(i+1/2, j) - \frac{2\mu \Delta y}{\Delta t} \cdot [H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2)] + \\ & \frac{\Delta y}{\Delta x} [E_y^{n+1/2}(i+1, j+1/2) - E_y^{n+1/2}(i, j+1/2) - E_y^{n+1/2}(i+1, j-1/2) + E_y^{n+1/2}(i, j-1/2)]\end{aligned}$$

其中 ϵ 为真实介质的介电常数。采用 ADI-FDTD 算法时, (7)式中的 q 可大于 1。

实际计算表明^[8], 采用该方法并选取适当的介电常数, 即可改善 ADI-FDTD 相速特性, 很大程度上消除色散现象。该方法实施较为简便, 根据所关心的频谱范围, 经过简单的计算, 既可获得能在较宽的频带范围改善相速特性的介电常数。该方法有待进一步研究的问题包括: 如何处理在消除某段频率范围色散误差时出现的低频部分误差增加的情况, 以及能否在计算空间中自由地控制更宽频带范围的相速, 令其同时接近相速理想值。

5 结束语

总之,ADI-FDTD 今后的发展必须在原有无条件稳定、计算时间短等优点的基础之上,尽量减少内存使用量,控制其数值色散,并简化计算的复杂性。随着进一步的深入研究,ADI-FDTD 将在纳米计算电磁学、微波化学、生物电磁学等新兴的交叉学科中得到更广泛的应用。

参考文献:

- [1] T Namiki. 3-D ADI-FDTD method—unconditionally stable time—domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2000, 48(10): 1743—1748.
- [2] T Namiki. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1999, 47(10): 2003—2007.
- [3] Charlie C.-P. Chen, Tae-Woo Lee. Generalized FDTD-ADI: An Unconditionally Stable Full-Wave Maxwell's Equations Solver for VLSI Interconnect Modeling [C]. 2000 International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD '00), 156—163.
- [4] T. L. Willke and S. S. Gearhart. LIGA micromachined planar transmission lines and filters [J], IEEE Trans. Microwave Theory Techniques, 1997, 45(10): 1681—1688.
- [5] Zhizhang Chen, Iftibar Ahmed. A Hybrid ADI-FDTD Scheme and its comparisons with the FDTD method [J]. IEEE Antennas and Propagation Society, AP—S International Symposium (Digest), 2003, (4): 360—363.
- [6] Fenghua Zheng, Zhizhang Chen, and Jiazong Zhang. Development of three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain methods [J]. IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest, 2000, (2): 1117—1120.
- [7] J S Juntunen and T D Tsiboukis. Reduction of numerical dispersion in FDTD method through artificial anisotropy [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., 2000, 48 (9): 582—588.
- [8] 刘波,任武.一种有效减少 ADI-FDTD 数值色散的方法 [J]. 微波学报,2003, 19(2): 19—23.
- [9] G D Kondylis, F D Flaviis, G J Pottie, and T Itoh. A memory-efficient formulation of the finite-difference time-domain method for the solution of Maxwell equation. [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2001, 49(7): 1310—1320.

Recent advance of the ADI-FDTD method

FU Qiang, LIU Chang-jun

(College of Electronic Information, SCU, Chengdu 610064)

Abstract: Some approaches of the ADI-FDTD algorithm are presented. The method is unconditionally stable and the maximum time-step size is not limited by the Courant-Friedrich-Levy (CFL) condition. As a result the CPU time may be greatly saved. The numerical results of a micro-strip structure achieved by ADI-FDTD are presented. To reduce the memory requirement and numerical dispersion of ADI-FDTD, some improvements such as hybrid method and high-order method are discussed. The method may be applied to the simulation of the complex structure, especially those including both coarse and refined objects.

Key words: FDTD; unconditional stability; numerical dispersion