

# 微波加热陶瓷中热失控现象的分析与控制

刘长军<sup>\*</sup>, 申东雨

四川大学电子信息学院, 成都 610064  
汉城国立大学数学系, 汉城 151-747, 韩国  
<sup>\*</sup> E-mail: cjliu@ieee.org

收稿日期: 2007-03-22; 接受日期: 2007-10-26

国家自然科学基金(批准号: NSCF603010004, 60411140521)和韩国工程与科学基金(KOSEFF01-2004-000-10263-0, R14-2003-019-01000-0, KRF-2006-070-C00014)资助项目

**摘要** 对微波加热的热失控过程进行模拟, 使用基于时域有限差分法(FDTD)的算法求解 Maxwell 方程和热传导方程(HTE)耦合的方程组, 模拟了微波加热陶瓷板的温度变化过程。在施加不同微波功率的情况下, 计算了微波加热下多种介质参数的陶瓷板的温度变化, 分析了出现热失控现象的条件。提出一种单温度阈值双微波功率的控制方法, 用于提高微波加热效率并且控制热失控现象。同时给出了该控制方法中最终施加微波功率与监视温度阈值的关系。本文的模拟和分析方法可以在微波加热技术相关的领域得到应用。

**关键词**  
时域有限差分  
热传导  
温度  
功率阈值

微波加热可以加快材料的处理, 在化工、制药、食品、材料、采矿等领域都有广泛应用<sup>[1~6]</sup>。在微波加热过程中, 材料的电导率、介电常数、热传导系数等特性, 随温度升高而变化<sup>[7~10]</sup>, 导致一些特殊的宏观热现象。微波加热应用在陶瓷烧结<sup>[11]</sup>、矿物粉碎<sup>[6]</sup>、化工制药<sup>[1,2,12]</sup>、橡胶处理等领域时, 被加热材料可能出现局部“热点”<sup>[13]</sup>, 温度急剧升高, 导致温度失控的现象。微波加热中的这类现象称为热失控现象。

热失控是在微波加热过程中出现的一种非稳定宏观热现象。热失控现象有两种基本的表述形式<sup>[14, 15]</sup>: 1) 稳态温度的描述; 2) 升温速率的描述。前者表述为: 在微波加热中介质温度达到稳定分布状态, 如果施加微波的功率或介质参数出现微小变化, 最终导致稳态温度发生突变。后者表述为: 在微波加热过程中某一段时间内介质温度出现急剧升高。在微波加热陶瓷的过程中, 陶瓷材料的电导率和热传导系数对温度依赖关系均可导致热失控现象<sup>[9,14]</sup>。

在微波加热陶瓷热失控的初期研究中, 1991 年出现了基于实验的经验公式描述<sup>[16]</sup>。1992 年 Kriegsmann 提出了一种热失控的模型并用渐进法求解稳态温度<sup>[14]</sup>, 吸引很多研究者进行热

失控的数学分析和讨论<sup>[15,17~19]</sup>. 在热失控的数值分析中, 需要耦合电磁场方程和热传导方程. 1999年 Alpert 和 Jerby 利用双时间尺度进行耦合计算<sup>[20]</sup>, 发展为一种基于有限元和自适应时间步长的算法, 并对热失控过程进行模拟和仿真<sup>[21]</sup>. 使用基于时域有限差分法也可以对微波加热进行模拟分析<sup>[22~25]</sup>.

本文提出了一种新型基于 FDTD 算法求解耦合的 Maxwell 方程组和 HTE 方程, 完成了微波加热陶瓷板的数值模拟. 以微波加热陶瓷板模型为例, 通过改变微波功率和陶瓷板参数, 模拟了陶瓷稳态温度与微波功率间的不连续变化, 得到陶瓷板温升的时域过程, 讨论了不同参数对热失控现象的影响. 本文提出了一种避免在微波加热中出现热失控现象的微波功率控制方法, 给出了终态施加微波功率和温度监测阈值之间的关系. 此方法可以对复杂的微波加热模型进行仿真, 应用于微波加热装置的设计, 促进微波加热技术的进一步研究和应用.

## 1 微波加热陶瓷的模型

横电磁(TEM)模式的微波加热陶瓷板系统模型如图 1 所示<sup>[14,18,19]</sup>. 陶瓷板置于自由空间, 厚度为  $l$ , 相对介电常数为  $\epsilon_r$ . 微波垂直入射陶瓷板, 频率为  $f = 2450$  MHz, 沿  $z$  方向传输, 电场为  $x$  方向. 电磁场满足 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu_r \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_z. \end{cases} \quad (1)$$

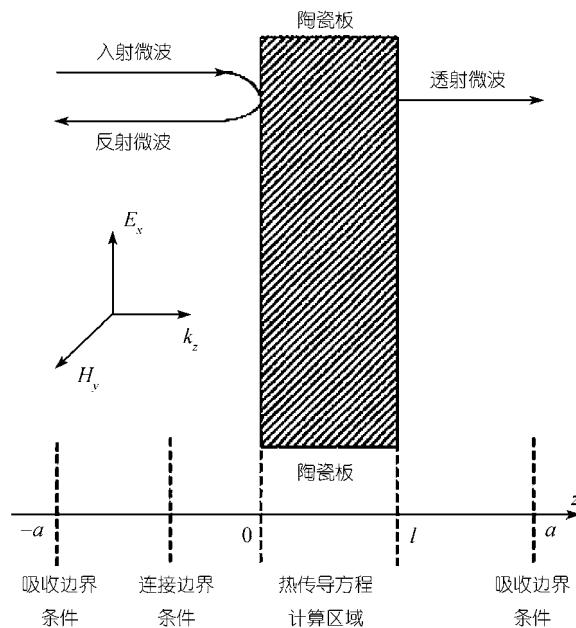


图 1 微波加热陶瓷板的模型

陶瓷介质是有耗介质, 吸收微波功率导致温度升高。温度变化符合 HTE 方程

$$\rho C_p \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} + P_d(z,t), \quad (2)$$

其中  $T$  为温度,  $\rho$  为陶瓷密度,  $C_p$  为比热,  $K$  为 HTE 系数,  $P_d$  为微波耗散功率。不考虑陶瓷介质的极化损耗, 微波耗散功率为  $P_d(z,t) = \frac{1}{2} \sigma(z,t) |E_x(z,t)|^2$ 。假定陶瓷板环境温度  $T_0$  不变。当陶瓷板温度高于  $T_0$  时, 表面出现热对流和热辐射。因此, HTE 边界条件为

$$K \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = h[T(z,t) - T_0] + se\left[T^4(z,t) - T_0^4\right], \quad (3)$$

其中  $h$  为热对流系数,  $s = 5.67 \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$  为 Stefan-Boltzmann 热辐射常数,  $e$  为表面热辐射率。研究表明, 陶瓷电导率随温度升高而增大, 使用指数函数模型或 Arranius 模型描述<sup>[14, 19]</sup>。采用指数函数模型, 陶瓷电导率表示为

$$\sigma(T) = \sigma_0 \exp\left(\frac{T - T_0}{T}\right), \quad (4)$$

其中  $\sigma_0$  为陶瓷在常温  $T_0 = 300 \text{ K}$  时的电导率  $1.63 \times 10^{-3} \text{ S/m}$ 。

## 2 数值模拟方法

微波加热过程中陶瓷特性随温度变化, 在电磁场模拟中要处理时变介质。因此, 宜选用时域有限差分法(FDTD)求解 Maxwell 方程组和 HTE 的耦合方程<sup>[22]</sup>。FDTD 模拟系统如图 1 所示, 在陶瓷板两侧  $z = -a$  和  $z = a$  处为一阶 Mur 吸收边界(ABC), 连接边界(CBC)位于陶瓷板与左侧吸收边界之间。FDTD 的时间步长  $\Delta t$  和空间步长  $\Delta z$  受 Courant 法则限制, 设置时间步长为

$$\Delta t = \frac{c}{2\Delta z} (c \text{ 为真空中的光速})。按照 Euler 显式差分格式离散(2)式$$

$$T^{n+\frac{1}{2}}(k) = T^{n-\frac{1}{2}}(k) + \frac{\Delta t_{\text{HTE}}}{\rho C_p} \left[ K \frac{T^{n-\frac{1}{2}}(k+1) - 2T^{n-\frac{1}{2}}(k) + T^{n-\frac{1}{2}}(k-1)}{\Delta z^2} + \frac{1}{2} \sigma^{n-\frac{1}{2}}(k) |E^n(k)|^2 \right], \quad (5)$$

其中  $\Delta t_{\text{HTE}}$  为 HTE 时间步长,  $k$  为空间位置  $z = k\Delta z$ , 上标为时间  $t = n\Delta t_{\text{HTE}}$ 。求解方程(5)需要满足稳定条件  $\Delta t_{\text{HTE}} < \frac{\rho C_p}{2K} \Delta z^2$ 。将(3)式和(5)式合并, 得到差分格式的边界条件, 其中左侧边界条件为

$$\begin{aligned} T^{n+\frac{1}{2}}(1) = T^{n-\frac{1}{2}}(1) + \frac{\Delta t_{\text{HTE}}}{\rho C_p} \left[ K \frac{T^{n-\frac{1}{2}}(2) - T^{n-\frac{1}{2}}(1)}{\Delta z^2} - h\left(T^{n-\frac{1}{2}}(1) - T_0\right) \right. \\ \left. - se\left(T^{n-\frac{1}{2}}(1)^4 - T_0^4\right) + \frac{1}{2} \sigma^{n-\frac{1}{2}}(1) |E^n(1)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

对于 2450 MHz 的微波, FDTD 时间步长  $\Delta t$  典型值为  $10^{-11} \text{ s}$  量级, 微波加热持续时间通常为  $10^2 \text{ s}$  量级。如果直接使用 FDTD 模拟, 需要计算约  $10^{13}$  个时间步。为了加快模拟计算, 在微波加热

过程的 FDTD 模拟中引入时间比例因子  $\alpha$ , 把 FDTD 的时间步长  $\Delta t$  与 HTE 的时间步长  $\Delta t_{\text{HTE}}$  变换到同一个数量级<sup>[22, 24, 25]</sup>, 本文取  $\alpha = 10^{10}$ . 将 Maxwell 方程组和 HTE 耦合求解, 计算流程如图 2 所示. 通过交替更新电磁场、陶瓷的温度和电导率, 进行微波加热陶瓷过程的时域模拟. 求解 HTE 的区间为  $[0, l]$ , FDTD 计算区间为  $[-a, a]$ . 采用图 1 的计算模型, 利用图 2 的耦合算法, 实现对微波加热陶瓷板的模拟.

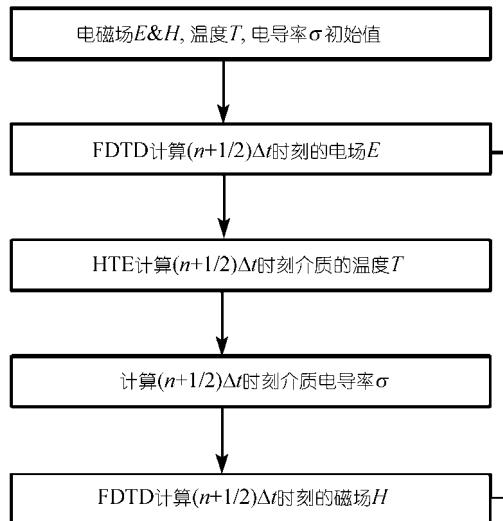


图 2 耦合求解的计算流程图

### 3 模拟计算结果及分析

入射微波频率电场强度幅度为  $E_0$ , 忽略陶瓷介电常数和热传导系数随温度的变化, HTE 的参数见文献<sup>[19]</sup>. 模拟计算涉及的一些主要参数如表 1 所示.

表 1 FDTD 和 HTE 计算涉及的主要参数

| $t_{\text{FDTD}}/\text{ps}$ | $z/\text{mm}$ | $t_{\text{HTE}}/\text{ms}$ | $\epsilon_r$ | $K/\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | $E$ | $h/\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ |
|-----------------------------|---------------|----------------------------|--------------|--|-----|--|
| 0.504                       | 0.302         | 5.04                       | 10           | 10   | 0.7 | 170  |

#### 3.1 热失控的微波功率阈值

通过考察不同入射微波功率对应的陶瓷稳态温度, 分析长时间微波加热的热失控现象. 取陶瓷板厚度为  $l = 4 \text{ cm}$ , 定义相对温度为  $\theta = (T - T_0)/T_0$ . 分别在陶瓷初始相对温度为  $\theta_0 = 0$  和  $\theta_0 = 7$  的情况下, 模拟计算施加不同微波功率对应的陶瓷稳态温度.  $\theta_0 = 7$  对应于施加微波功率低时高温陶瓷板的一个降温过程. 计算的陶瓷板中心点稳态相对温度  $\theta_c$  如图 3 所示, 其中微波功率密度定义为  $\frac{1}{2}\omega\epsilon_0\epsilon_rE_0^2$  (以下简称微波功率). 本文的模拟结果与文献[19]基本吻合.

如果陶瓷板初始温度低, 微波功率逐渐增大到  $P_{\text{TH}}$  时, 陶瓷板中心的稳态温度从下分支跳变到上分支, 温度出现非连续变化. 如果陶瓷板初始温度高, 微波功率逐渐减小到  $P_{\text{TL}}$  时, 陶瓷板中心的稳态温度从上分支跳变到下分支, 温度也出现非连续变化. 定义微波功率  $P_{\text{TH}}$  为微

波加热中热失控的功率阈值。在低初始温度的条件下, 微波功率在  $P_{TH}$  附近的微小变化, 将会导致陶瓷稳态温度出现突变, 从而出现热失控现象。如果控制微波功率在热失控功率阈值以下, 陶瓷稳态温度就会随微波功率平稳连续变化。

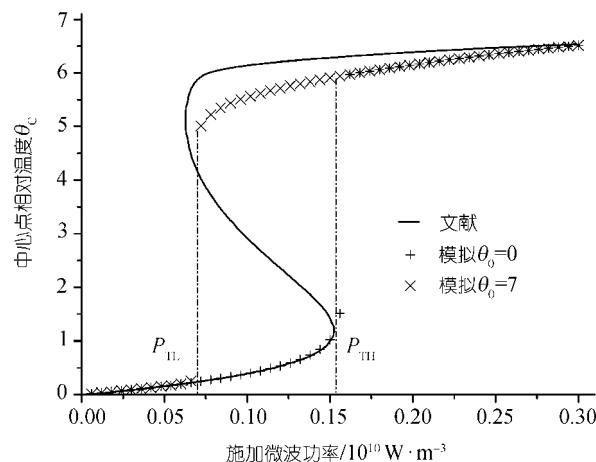


图 3 微波功率与陶瓷板中心稳态温度的关系

### 3.2 热失控的时域过程

在陶瓷板初始相对温度为  $\theta_0 = 0$  时, 分别施加两种不同的微波功率, 模拟陶瓷板温度升高的时域过程。图 4(a)给出了施加微波功率为  $P_a = 0.15 \times 10^{10} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$  时 ( $P_a \approx P_{TH}$ ,  $P_a$  略低于微波功率阈值  $P_{TH}$ ), 陶瓷板升温的时域过程。陶瓷板温度平稳上升, 温升速率逐渐降低, 需要 270 min 达到热平衡状态。陶瓷板的最高温度位置位于中心位置, 最高稳态相对温度  $\theta_{max} = 1.1$ 。微波加热过程中没有出现热失控现象。如果施加微波功率小于  $P_a$ , 陶瓷板温度升高过程缓慢, 不会出现热失控现象。

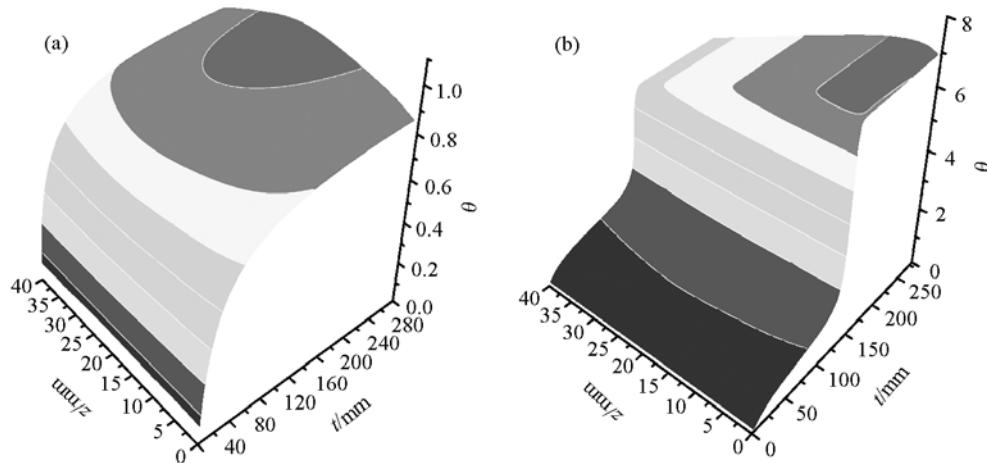


图 4 陶瓷板温升的时域过程

(a)  $P_a = 0.15 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$ ;  $P_a < P_{TH}$ ; (b)  $P_b = 0.16 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$ ,  $P_b > P_{TH}$

图 4(b)给出了施加微波功率  $P_b = 0.16 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$  ( $P_b \approx P_{\text{TH}}$ ,  $P_b$  略高于微波功率阈值  $P_{\text{TH}}$ )时, 陶瓷板的升温时域过程。在开始阶段, 温度平稳上升, 最高温度位于陶瓷板中心。在微波加热 140 min 时, 温度出现急剧上升, 最高升温速率达到 326 /min, 出现热失控现象。在 200 min 时温度达到稳态分布, 最高相对温度  $\theta_{\max} = 7.0$  位于陶瓷板靠近微波入射的一侧。如果施加微波功率大于  $P_b$ , 陶瓷板温度会有一个急剧升高的过程, 出现热失控现象的时间提前。

在微波功率阈值  $P_{\text{TH}}$  附近, 微小的微波功率变化可以导致陶瓷板稳态温度出现突变。通过对比图 4 可以看到, 施加微波功率增加 6%, 最高稳态温度升高了 7 倍, 呈现明显的非线性特性。另外, 施加微波功率越是靠近功率阈值, 则需要更长的时间达到温度的稳态分布。

### 3.3 陶瓷参数对热失控的影响

陶瓷的特性, 如介电常数、导热系数和电导率对温度的依赖关系, 都会影响热失控的功率阈值。陶瓷板的几何参数(陶瓷板的厚度)对微波功率阈值和稳态温度也都有显著的影响。变化陶瓷板的厚度, 模拟计算施加不同微波功率时, 陶瓷板中心点的稳态温度, 如图 5 所示。当陶瓷板厚度为 4 cm 和 6 cm 左右时, 施加较低的微波功率就会出现热失控现象。当陶瓷板厚度为 2.7 cm 和 4.7 cm 左右时, 则需要更高的微波功率才会出现热失控现象。

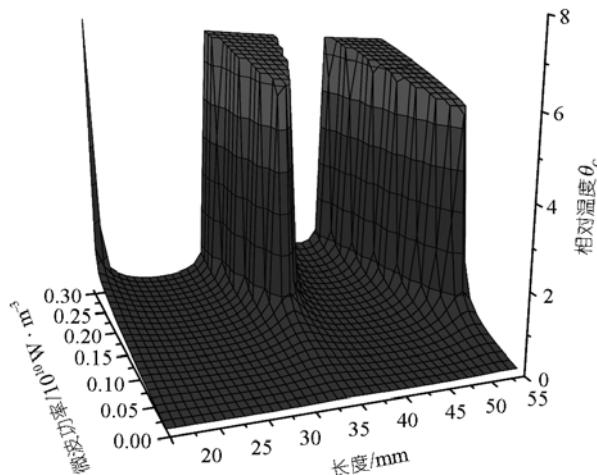


图 5 陶瓷板稳态温度与厚度的关系

陶瓷板稳态温度对陶瓷板厚度呈现很高的敏感性。施加相同的微波功率( $0.2 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$ ), 陶瓷板厚度在 35 mm 处出现 1 mm 的较小变化, 会导致稳态温度发生突变。在实际应用中, 呈现为不同批次样品微小的差别导致微波加热效果的不同。如果改变陶瓷的介电常数、导热系数等, 模拟计算可以得到类似的结果。陶瓷参数的微小变化, 可能会影响微波加热的热失控功率阈值。因此, 需要保证系统工作在相对平稳的区域, 避开对陶瓷参数敏感的区域, 增强微波加热系统的稳定性。

### 3.4 微波功率对热失控过程的控制

如果施加微波功率略低于热失控临界功率  $P_{TH}$ , 可以避免出现热失控现象, 但是微波加热效率低。如果在微波加热的过程中通过改变微波的功率, 就可以缩短加热时间, 提高加热效率。在工程应用上, 利用温度反馈控制微波功率, 可以避免出现热失控现象<sup>[10, 27]</sup>, 但是温度变化梯度的检测和微波功率连续变化的调节装置复杂。

本文提出一种基于单温度阈值判断的双微波功率控制方法, 提高微波加热效率, 并且避免出现热失控现象。首先使用微波高功率  $P_H$  ( $P_H > P_{TH}$ ) 进行加热, 当监控陶瓷板表面温度达到温度阈值  $\theta_T$  时, 降低微波功率到最终功率  $P_F$  ( $P_{TL} < P_F < P_{TH}$ ), 使陶瓷板最终稳定在预期的稳态温度。

例如, 对 4 cm 的陶瓷板进行微波加热, 首先控制微波功率为  $P_H = 0.5 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$ , 当监控陶瓷板表面温度达到  $\theta_T = 2.0$  时, 控制微波功率为  $P_F = 0.15 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$ 。微波加热 25 min 的时域过程, 如图 6(a) 所示。尽管在图 6(a) 中  $P_F = 0.15 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$  低于微波功率阈值, 但是微波热失控现象依然出现。如果改变监控陶瓷板表面温度的阈值为  $\theta_T = 1.0$ , 微波加热的时域过程如图 6(b) 所示, 没有出现热失控现象, 并且短时间内陶瓷板就达到了稳态温度。通过合理选择施加微波功率和监控温度, 就可以既避免出现热失控又缩短加热时间。

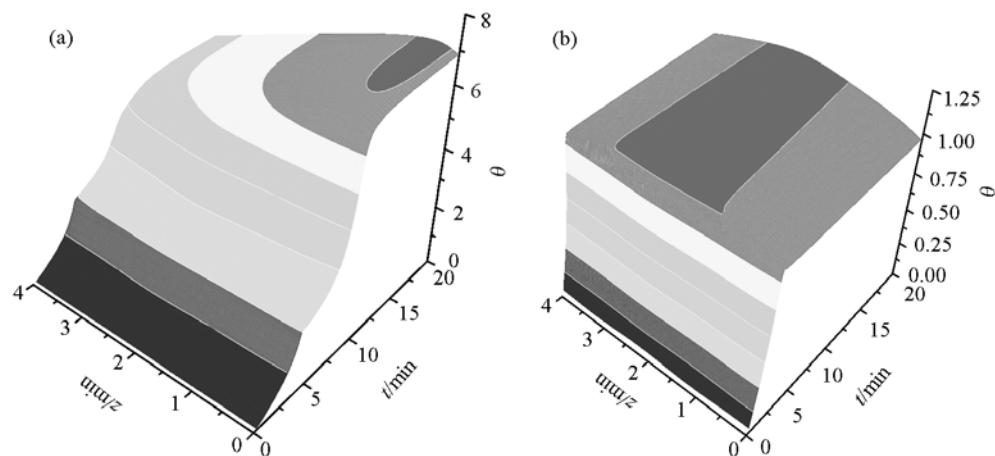


图 6 微波功率控制

(a)  $P_F = 0.15 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$ ,  $\theta_T = 2.0$ ; (b)  $P_F = 0.15 \times 10^{10} \text{ W/m}^3$ ,  $\theta_T = 1.0$

为了避免出现热失控现象, 根据稳态温度与微波功率之间的关系, 微波加热系统监控的温度阈值  $\theta_T$  应该由最终微波功率  $P_F$  限定为

$$\theta_T = \theta(P_{TH}) + \frac{\theta(P_{TH}) - \theta(P_{TL})}{P_{TH} - P_{TL}}(P_F - P_{TH}), \quad (7)$$

其中  $\theta(P_{TL})$  和  $\theta(P_{TH})$  分别为微波功率阈值  $P_{TL}$  和  $P_{TH}$  在下分支和上分支对应的稳态温度(参考图 3)。为了提高系统的可靠性, 可以通过降低温度阈值  $\theta_T$  来提高安全系数。由于仅需要比较测

量温度与温度阈值, 并且微波功率只有高低两种状态, 所以此系统的微波功率控制方法实现简便并且稳定可靠.

#### 4 结论

本文使用基于 FDTD 的算法求解 Maxwell 方程组和 HTE 耦合的问题, 模拟了微波加热陶瓷板的热失控现象. 数值模拟结果与文献吻合, 反映了微波加热陶瓷非线性过程的复杂性, 观测到陶瓷板稳态温度与微波功率的非唯一对应关系. 根据模拟计算和分析, 总结微波加热过程中出现热失控现象的条件: 1) 被加热介质的特性对温度具有非线性依赖关系; 2) 微波加热功率大于特定的微波功率阈值. 热失控的微波功率阈值不仅与材料的介电特性有关, 而且依赖于材料的几何参数.

对微波加热陶瓷板温升的时域过程分析可以得到: 如果施加微波的功率高于功率阈值, 则会出现一段温度急剧上升的过程; 反之, 陶瓷板温度保持平稳上升. 热失控现象的两种基本描述: 微波功率阈值和温升速率突变. 从时域模拟结果来分析, 两者存在等价的关系, 属于热失控现象的不同表征.

在特定条件下, 热失控微波功率阈值对被加热介质的参数特别敏感. 例如, 在微波加热食品的应用中, 发现温度升高和分布对食品的大小和形状非常敏感<sup>[5]</sup>. 在本文的模拟中, 在施加相同微波功率的条件下, 陶瓷板厚度微小的变化会导致陶瓷板稳态温度出现突变. 这种稳态温度对陶瓷板厚度的敏感性属于非线性模型双稳态特性的宏观体现.

本文提出了一种基于温度阈值的双微波功率控制方法, 有效地在微波加热中避免出现热失控现象. 利用高初始微波功率加快温升速率, 最终微波功率控制材料的稳态温度, 从而提高微波加热效率. 热失控的出现不仅与施加微波功率相关, 还与当前材料的温度有关. 本文给出了根据最终微波功率确定合理监控温度阈值的预测公式.

随着微波理论和技术的发展, 微波加热技术在很多的领域有了新的应用, 例如微波焊接<sup>[26]</sup>、微波混合加热<sup>[27]</sup>、微波切割<sup>[28]</sup>、微波钻孔<sup>[29]</sup>等等. 这些应用都要求解耦合的 Maxwell 方程组和 HTE 方程来分析微波加热的过程. 因此, 本文讨论的模拟方法和微波功率控制方法具有重要的应用价值.

#### 参考文献

---

- 1 Oliver C K, Doris D. The impact of microwave synthesis on drug discovery. *Nat Rev Drug Discov*, 2006, 5(1): 51–63
- 2 Adam D. Microwave chemistry: Out of the kitchen. *Nature*, 2003, 421(6923): 571–572
- 3 Jerby E, Dikhtyar V. Microwave drill. *Science*, 2002, 298(5593): 587–589
- 4 Osepchuk J M. Microwave power applications. *IEEE T Microw Theory*, 2002, 50(3): 975–985
- 5 Oliverira M E C, Franca A S. Microwave heating of foodstuffs. *J Food Eng*, 2002, 53(4): 347–359
- 6 Walkiewicz J W, Clark A E, McGill S L. Microwave-assisted grinding. *IEEE T Ind Appl*, 1991, 27(2): 239–242
- 7 Wu X, Thomas J R Jr. Control of thermal runaway in microwave resonant cavities. *J Appl Phys*, 2002, 92(6): 3374–3380
- 8 Nelson S O, Bartley P G Jr. Measuring frequency- and temperature-dependent permittivities of food materials, *IEEE T Instrum Meas*, 2002, 51(4): 589–692

- 9 Parris P E, Kenker V M. Thermal runaway in ceramics arising from the temperature dependent of the thermal conductivity. *Phys Status Solidi B*, 1997, 200(1): 39–47
- 10 Bale G O, Li M. Robust temperature control for microwave heating of ceramics. *IEEE T Ind Electron*, 1997, 44(1): 124–131
- 11 Chatterjee A, Basak T, Ayappa K G. Analysis of microwave sintering of ceramics. *Aiche J*, 1998, 44(10): 2302–2311
- 12 McIntosh R D, Nolan P F. Review of the selection and design of mitigation systems for runaway chemical reactions. *J Loss Prevent Proc*, 2001, 14(1): 27–42
- 13 Zhu S, Zhang Y, Marchant T R. A Drbem model for microwave heating problems. *Appl Math Model*, 1995, 19(5): 287–297
- 14 Kriegsmann G A. Thermal runaway in microwave heated ceramics – A one-dimensional model. *J Appl Phys*, 1992, 71(4): 1960–1966
- 15 Hill J M, Marchant T R. Modeling microwave heating. *Appl Math Model*, 1996, 20(1): 3–15
- 16 Kenker V M, Skala L, Weiser M W, et al. Theory of microwave interactions in ceramic materials: The phenomenon of thermal runaway. *J Mater Sci*, 1991, 26(9): 2483–2489
- 17 Vriezinga C A, Sanchez-Pedreno S, Grasman J. Thermal runaway in microwave heating – a mathematical analysis. *Appl Math Model*, 2002, 26(11): 1029–1038
- 18 Vriezinga C A. Thermal profiles and thermal runaway in microwave heated slabs. *J Appl Phys*, 1999, 85(7): 3774–3779
- 19 Gupta N, Midha V, Balakotaiah V, et al. Bifurcation analysis of thermal runaway in microwave heating of ceramics. *J Electrochem Soc*, 1999, 146(12): 4659–4665
- 20 Alpert Y, Jerby E. Coupled thermal-electromagnetic model for microwave heating of temperature-dependent dielectric media. *IEEE T Plasma Sci*, 1999, 27(2): 555–562
- 21 Rabello A A, Silva E J, Saldanha R R, et al. Adaptive time-stepping analysis of nonlinear microwave heating problems. *IEEE T Magn*, 2005, 41(5): 1584–1587
- 22 Torres F C, Jecko B. Complete FDTD analysis of microwave heating processes in frequency-dependent and temperature-dependent media. *IEEE T Microw Theory*, 1997, 45(1): 108–117
- 23 Iskander M F. FDTD simulation of microwave sintering of ceramics in multimode cavities. *IEEE T Microw Theory*, 1994, 42(5): 793–800
- 24 闫丽萍, 黄卡玛, 刘长军. 微波加热 FDTD 模拟中时间压缩因子的研究. 四川大学学报(自然科学版), 2003, 40(2): 395–398
- 25 刘长军, 黄卡玛, 胡仲霞, 等. 化学反应回对微波非线性响应的实验研究和数值模拟. 微波学报, 2000, 16(2): 165–171
- 26 Kriegsmann G A, Luke J H C. Microwave joining of two long hollow tubes – An asymptotic theory and numerical simulations. *J Eng Math*, 2001, 39(1): 63–78
- 27 Haala J, Wiesbeck W. Modeling microwave and hybrid heating processes including heat radiation effects. *IEEE T Microw Theory*, 2002, 50(5): 1346–1354
- 28 Lee M Z C, Marchant T R. Microwave thawing of cylinders. *Appl Math Model*, 2004, 28(8): 711–733
- 29 Jerby E, Aktushev O, Dikhtyar V. Theoretical analysis of the microwave-drill near-field localized heating effect. *J Appl Phys*, 2004, 97(034909): 1–7